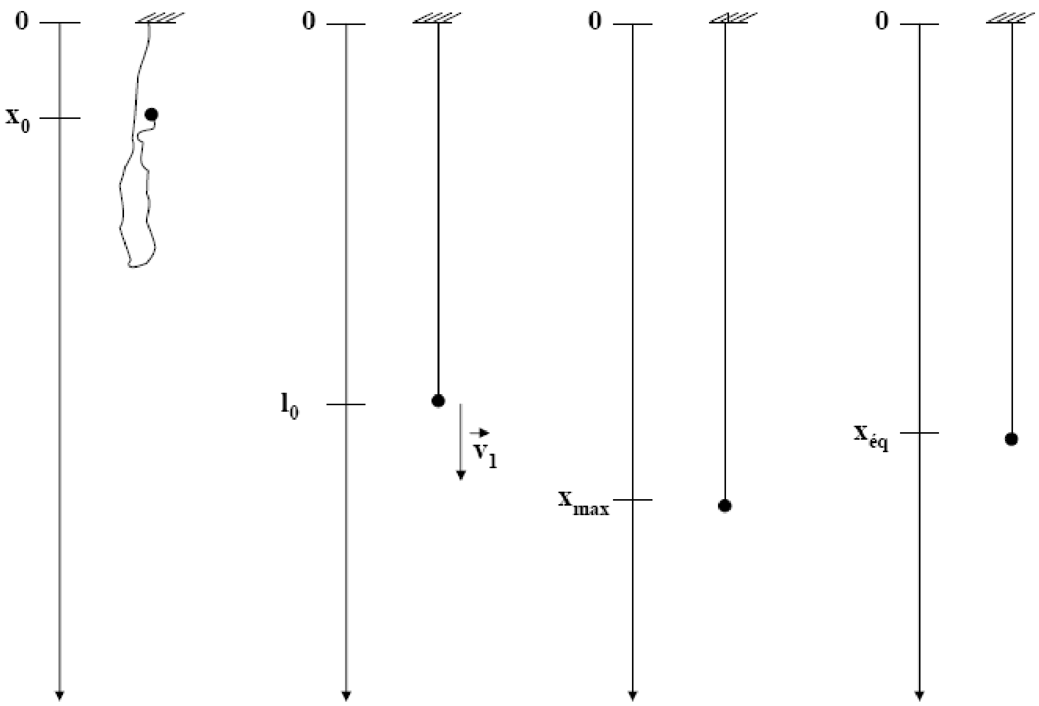
FORCE DE CHOC

On considère un grimpeur de masse M, accroché à une corde de longueur à vide l_0. L'axe Ox est vertical, dirigé vers le bas, l'origine est prise au point d'attache de la corde (voir figure).

A l'instant t = 0, le grimpeur est en x = x_0 et sans vitesse ; ensuite il chute et passe à l'instant t_1 par le point d'abscisse x = l_0 avec une vitesse $\vec{v_1}$.



Ecrivons la conservation de l'énergie entre les instants t = 0 et t = t_1, dans cette phase il n'y a pas d'énergie potentielle élastique :

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 - Mgl_0 = -Mgx_0$$

Pour $t \geq t_1$, la conservation de l'énergie s'écrit pour toute position x du grimpeur (en notant k la constante de raideur du ressort équivalent à la corde) :

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 - Mgx = \frac{1}{2}Mv_1^2 - Mgl_0 = -Mgx_0$$

En particulier, pour t = t_2 pour lequel le grimpeur atteint le point le plus bas de sa trajectoire, on a x = x_{max} et v = 0 :

$$\frac{1}{2}k(x_{max} - l_0)^2 - Mgx_{max} = -Mgx_0$$

Notons désormais $\Delta l = x - l_0$ l'allongement de la corde, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{1}{2}k\Delta l_{\max}^2 = Mg(x_{\max} - x_0) = Mg(x_{\max} - l_0 + l_0 - x_0) = Mg(\Delta l_{\max} + H)$$

en notant $H = l_0 - x_0$ appelée **hauteur de chute** (cette définition est indépendante du poids du grimpeur). La quantité $\Delta l_{\max}$ est donc solution d'une équation du second degré :

$$\Delta l_{\max}^2 - \frac{2Mg}{k}\Delta l_{\max} - \frac{2MgH}{k} = 0$$

dont le discriminant est : $\Delta = 4(\frac{Mg}{k})^2 + 8\frac{MgH}{k}$.

La seule solution positive est : $\Delta l_{\max} = \frac{Mg}{k} + \frac{Mg}{k}\sqrt{1 + 2\frac{kH}{Mg}}$.

La **force de choc** correspond à la tension exercée par la corde au point d'élongation maximale, son module est : $F = k\Delta l_{\max}$.

Utilisons maintenant la définition du module d'Young Y vue en cours :

$$\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta l}{l_0}$$

avec S la section de la corde. On a donc par identification : $k = \frac{YS}{l_0}$, et finalement :

$$F = Mg + Mg\sqrt{1 + 2\frac{YSH}{Mgl_0}}$$

On pose enfin $f = \frac{H}{l_0}$ où f est le **facteur de chute**, c'est-à-dire le rapport entre la hauteur de chute et la longueur de corde sollicitée, et on obtient la formule finale :

$$\boxed{F = Mg + Mg\sqrt{1 + 2f\frac{YS}{Mg}}}$$